Documento de Investigación
DI-139
Julio, 1988

JUEGOS CON INFORMACION INCOMPLETA

Joan E. Ricart

IESE Business School – Universidad de Navarra
Avda. Pearson, 21 – 08034 Barcelona, España. Tel.: (+34) 93 253 42 00 Fax: (+34) 93 253 43 43
Camino del Cerro del Águila, 3 (Ctra. de Castilla, km 5,180) – 28023 Madrid, España. Tel.: (+34) 91 357 08 09 Fax: (+34) 91 357 29 13

JUEGOS CON INFORMACION INCOMPLETA

Joan E. Ricart[1]

Resumen

Presenta los resultados básicos relativos a juegos con información incompleta, eso es, aquellos en los cuales los jugadores tienen información privada sobre sus preferencias u otros parámetros relevantes del juego. Después de una larga introducción con ejemplos, el artículo estudia los juegos bayesianos en profundidad y presenta la noción de equilibrio en estos casos. También se presenta en forma resumida un panorama de los juegos repetidos con información incompleta y de juegos con comunicación.

Nota: Artículo preparado para *Cuadernos Económicos* del I.C.E. sobre teoría de juegos, editado por Joan E. Ricart i Costa.

[1] Profesor de Economía, IESE

JUEGOS CON INFORMACION INCOMPLETA

Introducción

Una suposición estándar en teoría de juegos es que la estructura del juego –número de jugadores, sus conjuntos de estrategias, sus preferencias– son de conocimiento compartido (véase Aumann, 1976, para un tratamiento formal de este concepto). Por consiguiente, todos los jugadores conocen esta información, todos saben que los otros jugadores conocen esta información, y así sucesivamente. Cabe preguntarse cómo pueden estudiarse situaciones más reales donde los jugadores disponen de menos información sobre la estructura del juego.

Por ejemplo, el pago final puede depender de un estado desconocido de la naturaleza, sobre el que los jugadores tienen información privada. O puede ser que un jugador no conozca con exactitud alguna característica relevante de otros jugadores, sus preferencias o sus creencias sobre alguna información importante en el juego. Todos estos ejemplos tienen un factor en común, hay una asimetría de información en algún aspecto relevante del juego; los jugadores no tienen información completa sobre la estructura del juego, y por eso, en esta situación hablamos de *juegos con información incompleta*. Veamos un par de ejemplos:

Ejemplo 1

Una empresa que llamaremos E debe decidir sobre la entrada a un nuevo mercado o segmento de mercado, actualmente dominado por otra empresa I. Después de un exhaustivo análisis de las alternativas disponibles, la empresa E debe escoger entre dos opciones que ha clasificado como entrada agresiva (A) o entrada moderada (M). La principal incertidumbre que se vislumbra en el futuro es la reacción de la empresa I. Para simplificar, se considera que esta reacción puede clasificarse de dos formas distintas. Puede escoger aceptar la entrada (A) cediendo de su actual posición de monopolio a una situación de duopolio. Puede también responder agresivamente a la entrada de la empresa E, a base de una reacción (R) tendente a disminuir las posibilidades de consolidación de la empresa E en el nuevo mercado. Aunque tanto la entrada como la reacción es un proceso secuencial, las opciones que escoja cada empresa pueden considerarse como simultáneas, ya que en principio no es posible distinguir el tipo de entrada, A o M, y la empresa I debe tomar la decisión antes de tener suficiente información sobre la elección de E.

La situación se ve complicada, ya que la empresa E se ha enterado que la empresa I ha estado trabajando muy intensamente en una investigación para mejorar el proceso de fabricación del producto en cuestión. Es bien conocido en el sector que la empresa I ha destinado muchos recursos a este proyecto, hasta el punto de tener una situación financiera un tanto delicada. Sin embargo, sólo la empresa I conoce el resultado de su investigación. Si ésta ha tenido éxito, el coste de reaccionar agresivamente frente a la empresa entrante sería bastante menor, mientras que sería difícil si esta investigación ha fracasado, sobre todo dada la actual situación financiera de la empresa I. Cualquier observador del sector, incluida la empresa E, asignaría igual probabilidad a que la empresa I ha fracasado o tenido éxito en su investigación.

Dadas todas estas circunstancias, la Figura 1 presenta los pagos correspondientes para las dos empresas según sus estrategias y según el resultado de la investigación. Este es un juego de información incompleta, ya que la empresa E desconoce si la investigación ha tenido éxito o no, mientras que la empresa I sí tiene esta información. *

Figura 1

Matriz de pagos del ejemplo 1

	R	A
A	-1, 1	0, -1
M	-2, 2	1, 0

EXITO
(0,5)

	R	
A	-2, -2	1, -2
M	0, -3	2, 0

FRACASO
(0,5)

Ejemplo 2 (Vickrey, 1961)

Considere una subasta con dos participantes. Cada participante debe hacer una oferta en un sobre cerrado para adquirir un determinado objeto (o contrato). La oferta superior se lleva el objeto al precio indicado en la oferta. Cada participante conoce su valoración v_i del objeto en cuestión, pero desconoce la del otro jugador. Las valoraciones de los jugadores se suponen que son independientes y provienen de una misma distribución de probabilidad, definida sobre $[0,\infty)$, con densidad $f(v)$. Nuestro interés consiste en calcular qué oferta debe realizar un participante que observa su valoración v. *

Más adelante resolveremos estos dos ejemplos. Observemos que ambos juegos tienen algo en común. Algún jugador desconoce alguna información relevante sobre el juego, lo que le impide conocer los pagos asociados a cada par de estrategias. Por consiguiente, desconoce qué juego está realmente jugando. Las técnicas desarrolladas hasta ahora para analizar juegos no pueden aplicarse en estas circunstancias. Por otro lado, la mayoría de situaciones reales que pueden ser analizadas desde una perspectiva de juegos, o sea que tienen un componente estratégico, presentan, en mayor o menor grado, una dosis de información incompleta.

Harsanyi (1967-1968) presentó una formulación adecuada para modelizar situaciones con información incompleta. La idea central de su metodología consiste en sustituir el juego de información incompleta por uno de información completa pero imperfecta. Esta transformación se fundamenta en la idea siguiente. Cada jugador tiene una característica, que llamaremos *tipo*, que contiene toda la información relevante en posesión del jugador, sea esta información sobre ciertos valores, creencias o probabilidades subjetivas respecto a valores que desconozca, etc. Antes de iniciar el juego tiene lugar un movimiento de la naturaleza que determina el tipo de cada jugador. Cada jugador es informado de su tipo, pero no del tipo de los demás. De esta forma, el juego se transforma en un juego de información imperfecta pero completa, gracias a este movimiento adicional de la naturaleza.

Volvamos a nuestro ejemplo 1. La propuesta de Harsanyi consiste en modelar el juego como si el primer movimiento fuera una decisión de la naturaleza que con probabilidad 1/2 decidiera si la empresa I es del tipo "éxito" o "fracaso". Esta empresa conoce su tipo, pero la empresa E no es informada sobre el movimiento de la naturaleza. Seguidamente, cada empresa escoge sus opciones estratégicas simultánea e independientemente. Hecha esta transformación, la empresa E sigue teniendo dos estrategias puras, pero la empresa I, que tiene dos conjuntos de información, tiene ahora cuatro estrategias puras:

RR: Reaccionar si es del tipo éxito y reaccionar si es del tipo fracaso.
RA: Reaccionar si es del tipo éxito y adaptarse si es del tipo fracaso.
AR: Adaptarse si es del tipo éxito y reaccionar si es del tipo fracaso.
AA: Adaptarse si es del tipo éxito y adaptarse si es del tipo fracaso.

Nótese que la empresa I debe considerar estas cuatro estrategias *a pesar de saber su tipo* (como si decidiera su estrategia *antes* de conocer su tipo), ya que la otra empresa lo desconoce, y al tomar su decisión debe tener en cuenta no sólo el comportamiento de su tipo, sino también el de otros tipos que pudiera haber sido y que el contrincante puede suponer que ella es. De hecho, explotar la información incompleta del oponente es una de las opciones más interesantes que esta formulación nos permite considerar. Teniendo en cuenta la distribución de probabilidad del movimiento de la naturaleza, el juego en forma estratégica (o normal) se reduce a la matriz que se presenta en la Figura 2, donde todos los pagos son valores esperados teniendo en cuenta la probabilidad de éxito y fracaso.

Figura 2

Matriz de pagos del ejemplo 1.

	R/R	R/A	A/R	A/A
A	-1,5, -0,5	0, -0,5	-1,0, -1,5	0,5, -1,5
M	-1,0, -0,5	0, 1	0,5, -1,5	1,5, 0

La matriz de la Figura 2 es fácil de resolver por dominancia. La empresa I tiene una estrategia dominante R/A que deja indiferente a la empresa E sobre cualquiera de sus opciones.

Utilizaremos ahora la formulación de Harsanyi para encontrar las estrategias de equilibrio en la subasta del ejemplo 2. Como el problema es simétrico, buscaremos un equilibrio simétrico. Nuestro interés está en encontrar la oferta "b" que debería hacer un participante que observara una valoración "v" del objeto en cuestión. Sin embargo, siguiendo las recomendaciones de Harsanyi, para resolver este problema deberemos buscar toda la regla de decisión b(v), o sea, la función que para cada valoración nos indica la oferta adecuada.

Supongamos que el otro jugador (referido por el subíndice 2) sigue una estrategia b(v). Nosotros (subíndice 1) observamos v_1 y decidimos ofertar b_1. El beneficio esperado será:

$$(v_1-b_1)\ \mathrm{Prob}(b(v_2)<b_1) = (v_1-b_1)\ F(b^{-1}(b_1)) \qquad (1)$$

donde F(.) es la función acumulada de la distribución de probabilidad con densidad f(.). La condición necesaria y suficiente para que b(v) sea una estrategia de equilibrio es que la oferta que maximiza (1) sea exactamente $b(v_1)$. Esto es:

$$-F(b^{-1}(b_1)) + (v_1-b_1)\ f(b^{-1}(b_1))\ /\ b'(b^{-1}(b_1)) = 0$$

que evaluado en el punto $b_1=b(v_1)$, nos da:

$$-F(v_1) + (v_1-b(v_1))\ f(v_1)/b'(v_1) = 0$$

que equivale a:

$$b'(v_1) = (v-b(v_1))\ f(v_1)/F(v_1) \qquad (2)$$

La ecuación diferencial (2) nos permitiría encontrar la estrategia óptima para cada jugador en un equilibrio simétrico. Como ilustración, supongamos que la distribución de las valoraciones de cada jugador es una distribución uniforme en el intervalo unidad. Se puede comprobar que el resultado de la ecuación diferencial (2) para este caso sería $b(v) = v/2$; esto es, cada jugador debería ofertar exactamente la mitad de su valoración del objeto.

En términos algo más generales, la ecuación diferencial (2) tiene una interpretación intuitiva interesante. Se puede comprobar (con una simple integración por partes) que la solución general a la ecuación (2) es:

$$b(v) = \int_{[0,v]} t(f(t)/F(t))\ dt$$

Esta integral es exactamente el valor esperado de la valoración del otro participante si la valoración del jugador en cuestión es la mayor de las dos. O sea, la estrategia óptima consiste en suponer que la valoración observada es la mayor de las dos valoraciones, e intentar ofertar el valor esperado de la otra valoración. Nótese que en equilibrio, el objeto va a parar a las manos del jugador que lo valora más, y éste paga en valor esperado el valor del segundo. Este resultado es de hecho más general y se conserva para un número finito de participantes; siempre es óptimo ofertar el valor esperado de la segunda valoración mayor suponiendo que la observada es la mayor.

En este capítulo analizaremos los juegos con información incompleta desde la perspectiva de juegos no cooperativos. Dejaremos para más adelante los modelos de negociación y los juegos cooperativos con contenido de información incompleta. La distribución de temas en este capítulo es como sigue.

La sección 2 presenta el modelo básico de los juegos con información incompleta, los juegos bayesianos. Se discuten algunos aspectos esenciales del juego y la noción adecuada de equilibrio en juegos bayesianos, los equilibrios bayesianos. Finalmente se estudian algunos problemas de existencia de equilibrios en juegos con información incompleta y de equilibrios en estrategias puras.

La sección 3 presenta algunos modelos de juegos repetidos con información incompleta donde el énfasis está en el uso estratégico de la información privada y su transmisión e interpretación. La sección 4 presenta la posibilidad de comunicación, quizás a través de un mediador, en juegos con información incompleta. Se definen los mecanismos de coordinación y las condiciones que deben cumplir para que sean implementables.

Finalmente, la sección 5 concluye intentando dar una visión intuitiva de algunos conceptos centrales de este capítulo que pueden ser de utilidad para una mejor comprensión de las situaciones con información incompleta.

Un modelo para juegos con información incompleta

Juegos bayesianos

En un *juego con información incompleta,* los jugadores poseen información privada sobre preferencias y habilidades cuando escogen sus estrategias. El hecho de escoger sus estrategias en presencia de asimetrías en la información es la característica diferencial de estos juegos. Esta propiedad contrasta con la situación de los *juegos con información imperfecta*, en los cuales la asimetría se genera después de haber seleccionado las estrategias. Von Neumann y Morgenstern (1944) fueron los primeros en introducir estos términos.

Harsanyi (1967-1968) aportó las herramientas necesarias para comprender estas situaciones al introducir el concepto de *juego bayesiano* y al considerar éstos como el modelo adecuado para los juegos con información incompleta. Se necesitarían muchos años, hasta que Mertens y Zamir (1982) presentaran una formulación rigurosa de los argumentos de Harsanyi. En esta sección presentaremos una adaptación de estos argumentos basada en Myerson (1985).

Existen varios temas sobre los cuales los jugadores pueden tener información distinta: pueden diferir sobre el número de jugadores, sobre los espacios de estrategias disponibles para cada jugador, sobre cómo las decisiones influyen en los resultados del juego y sobre las preferencias de los jugadores sobre estos resultados. Harsanyi demostró que todas estas incertidumbres podrían transformarse en desconocimiento sobre las funciones de utilidad. Veamos cómo.

La incertidumbre sobre el número de jugadores puede transformarse en incertidumbre sobre los conjuntos de estrategias a base de incluir siempre el jugador con una estrategia adicional correspondiente a “no participar en el juego”. A su vez, la incertidumbre sobre las estrategias disponibles para cada jugador puede transformarse en incertidumbre sobre la función de resultados a base de considerar que las estrategias no factibles tienen un pago asociado de valor negativo muy grande. Finalmente, incertidumbres sobre la función de resultados o sobre las preferencias de los jugadores pueden modelarse conjuntamente a base de definir las utilidades de los jugadores directamente en el espacio de las estrategias. En consecuencia, toda información incompleta puede reducirse a un desconocimiento de las funciones de pagos π^k definidas sobre los espacios de estrategias (ampliados si es necesarios) $S = (S^1,..,S^n)$ para el número "n" máximo de jugadores.

Para modelar la incertidumbre anterior sobre las funciones de pagos, podemos introducir un parámetro desconocido θ en las funciones de utilidad. De esta forma, si los jugadores escogen las estrategias correspondiente al vector s en S y el valor del parámetro es θ, entonces el pago del jugador k será $\pi^k(s,\theta)$. Llamaremos H al conjunto de posibles valores del parámetro θ, que sin pérdida de generalidad puede considerarse un subconjunto de $R^{n|S|}$ para un juego finito. Además, como consideraremos que las funciones de utilidad de los jugadores están acotadas, podemos considerar H como un subconjunto de un cubo de lado unidad y dimensión $n|S|$.

La estructura de un juego de información incompleta definida como el conjunto de elementos $\{N,S^1,....,S^n,H,\pi^1,...\pi^n\}$ es insuficiente, ya que no incluye la información de los jugadores sobre el parámetro θ. Los jugadores desconocen el valor del parámetro, pero dispondrán de probabilidades subjetivas definidas sobre el conjunto H. Existen muchas técnicas disponibles (Raiffa, 1968) para poder medir las probabilidades subjetivas de los jugadores sobre los posibles valores del parámetro en el conjunto H. La descripción del juego debe tener en cuenta dichas probabilidades.

Sea q^{i1} la distribución de probabilidad subjetiva del jugador i sobre el conjunto H. Por consiguiente, para cada subconjunto A de H, $q^{i1}(A)$ es la probabilidad que el jugador i asigna al acontecimiento que el parámetro θ esté en el conjunto A. Nos referiremos a la distribución q^{i1} como *las creencias de primer orden* del jugador i.

En un juego, la decisión óptima de cada jugador depende de sus expectativas sobre las decisiones de los otros jugadores. Estas expectativas dependen a su vez de lo que el jugador crea que los otros jugadores piensan sobre el valor del parámetro θ. En consecuencia, debemos preguntarnos sobre las creencias del jugador i con respecto a las creencias de primer orden de todos los otros jugadores. De nuevo, un enfoque bayesiano nos indicará que el jugador i puede asignar una distribución subjetiva de probabilidad q^{i2} sobre las creencias de primer orden desconocidas para él, $(q^{11},...,q^{(i-1)1},q^{(i+1)1},...q^{n1})$. Nos referimos a la distribución q^{i2} como las *creencias de segundo orden* del jugador i.

De la misma forma deberíamos definir creencias de tercer orden, cuarto orden, y así sucesivamente, hasta un número infinito de creencias de órdenes superiores. La cuestión central es cómo hacer operativa esta secuencia infinita de creencias. Harsanyi sugería, de forma intuitiva, representar todo este conjunto de creencias en una sola variable, que llamaba el "tipo" del jugador. El tipo de un jugador debe especificar todo lo que el jugador conoce y no es de conocimiento compartido para todos los jugadores. Así, si la variable desconocida es el sueldo mínimo aceptable para un jugador, el conjunto T^i de posibles tipos para el jugador i debe contener los posibles valores de dicho sueldo mínimo, así como los parámetros de las creencias de los otros jugadores sobre este sueldo, etc.

Harsanyi propuso la utilización de un conjunto de tipos T^i para cada jugador. Estos conjuntos se consideran de conocimiento compartido por todos los jugadores. También de conocimiento compartido son las distribuciones de probabilidades a priori con las cuales se selecciona el tipo de cada jugador. Hecha esta selección, cada jugador conoce su propio tipo, pero no el de los demás.

Como veíamos antes, el juego de información incompleta se caracteriza por la secuencia infinita de creencias de los jugadores, mientras que Harsanyi proponía que ésta puede sustituirse por un juego de información imperfecta que se inicia con la asignación de un tipo a cada jugador siguiendo unas distribuciones de probabilidad conocidas por todos los jugadores. Harsanyi nunca presentó una formulación rigurosa que probara que se podrían encontrar espacios T^i para cada jugador lo suficientemente amplios para contener toda la secuencia infinita de creencias y que, a su vez, cumplieran las propiedades necesarias para hacerlos operativos (por ejemplo, ser compactos o, al menos, acotados).

Mertens y Zamir (1982) han demostrado que es posible seguir la estructura jerárquica de creencias con un modelo matemático consistente con su interpretación, de forma que existen juegos bayesianos con conjuntos de tipos suficientemente amplios para incluir las creencias de todos los órdenes. Su prueba formal requiere el uso de matemáticas bastante sofisticadas y el lector interesado puede referirse al texto original o a Myerson (1982). La aplicación de este modelo confirma la intuición de Harsanyi, en el sentido de que podemos representar un juego de información incompleta como:

$$G = \{N,S^1,\ldots,S^n,T^1,\ldots T^n, p^1,\ldots p^n,\pi^1,\ldots\pi^n\}$$

donde N es el número de jugadores, y para cada jugador, S^i representa el conjunto de estrategias (alternativas o decisiones) del jugador i, mientras que T^i es el conjunto posible de tipos del jugador i y π^i es su función de pagos. Para cada jugador i y para cada tipo t^i en T^i, $p^i(.|t^i)$ es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de tipos de los demás jugadores, esto es, sobre $T_{-i} = T^1 x \ldots x T^{i-1} x T^{i+1} x \ldots x T^n$. La función de pagos está definida en SxT, donde $T=T^1 x \ldots x T^n$. Por consiguiente, G es un *juego bayesiano* (véase Armbruster y Boge, 1979). Los conjuntos T^i son lo suficientemente amplios para incluir toda información privada o creencias de cualquier orden que el jugador i pueda tener sobre las preferencias y creencias de los otros jugadores en el juego.

Los conjuntos de tipos definidos hasta ahora pueden ser conjuntos de grandes dimensiones poco manejables en cualquier caso práctico. En contraste, uno de los puntos centrales de Harsanyi era limitar esta explosión de creencias de distintos órdenes a base de suponer que era de conocimiento compartido que todas las creencias de un jugador podían representarse por un conjunto sencillo, de dimensiones tratables, que constituía su conjunto de tipos para este jugador. Mertens y Zamir probaron que existen, para cada jugador, unos subconjuntos de los espacios T^i definidos anteriormente que siendo consistente con la idea de ser de conocimiento compartido que las creencias de los jugadores están en estos conjuntos, son a la vez finitos y densos en los conjuntos anteriores. Así pues, no existe pérdida de generalidad en suponer la existencia de conjuntos como los que sugería utilizar Harsanyi. Para simplificar la notación utilizamos T^i para representar, a partir de ahora, el conjunto de tipos del jugador i, subconjunto del espacio de creencias que denotábamos antes de la misma forma.

Desde un punto de vista práctico, los conjuntos de tipos T^i que utilizaremos en los juegos bayesianos no precisarán ser subconjuntos de los espacios de creencias de todos los órdenes. Será suficiente que T^i contenga la información privada de los jugadores sobre el estado de la naturaleza. La infinita jerarquía de creencias puede generarse a partir de las probabilidades p^i para cada jugador. En consecuencia, T^i será isomórfico a un subconjunto del espacio total de creencias, pero no idéntico a él. De esta forma, los problemas serán tratables. El ejercicio anterior de desarrollar los tipos a partir de las secuencias de creencias tenía como objeto verificar que los juegos con información incompleta podían modelarse como juegos bayesianos. Obtenido este propósito, nos vemos obligados a trabajar con conjuntos de tipos de mucho menor tamaño para tener un problema de dimensiones tratables, con la seguridad de que nuestro modelo conceptual corresponde a lo que se desea modelar.

Consistencia en las creencias

Decimos que las creencias de los jugadores $(p^1,\dots p^n)$ son consistentes si existe una distribución de probabilidad p* sobre T tal que las creencias de cada jugador coinciden con las distribuciones condicionales que se pueden calcular a partir de p* utilizando el teorema de Bayes. Esto es, para todo t^i en T^i y t^{-i} en T_{-i} se cumple:

$$p^i(t_{-1}|t^i) = p^*(t)/\Sigma t_{-i}\ p^*(t))$$

Harsanyi defendía que la mayoría de juegos bayesianos en la realidad eran consistentes, ya que presumía que los tipos de cada jugador se habían determinado simultáneamente, antes de empezar el juego, por algún acontecimiento aleatorio descrito con la distribución p*. Si ha existido algún instante anterior al principio del juego en que los jugadores no conocían su tipo, y todos los jugadores coincidían en creer que éstos se distribuirían con una distribución p*, es lógico suponer que sus creencias $(p^1\dots p^n)$, una vez conocen su tipo, deben ser consistentes con p*. Sin embargo, este momento puede no haber existido y, en cualquier caso, los jugadores conocen su tipo al iniciar el juego, por lo que probabilidades subjetivas sobre su propio tipo no tienen relevancia decisoria en el juego.

Cabe analizar en qué casos puede tener alguna relevancia la consistencia en creencias al estudiar juegos bayesianos en general. Para ello es interesante darse cuenta de que cuando un jugador toma una decisión en un juego bayesiano, selecciona aquella decisión que maximiza su utilidad (o pago) esperado condicional a su tipo actual. Los pagos esperados se calculan ponderando los pagos con las correspondientes probabilidades dependientes de la información del jugador. Esto nos permite definir como juegos bayesianos *equivalentes en probabilidad* a los juegos que tienen los mismos conjuntos de estrategias y de tipos, y que además los pagos y las probabilidades cumplen la equivalencia siguiente:

$$p'^1(t_{-i}|t^i)\ \pi'^i(s,t) = p^i(t_{-i}|t^i)\ \pi^i(s,t), \qquad \forall i,\ \forall s\in S,\ \forall t\in T$$

Esta equivalencia probabilística es importante, porque nos asegura que para juegos bayesianos en general, la consistencia en creencias no es un problema. En particular, *si los conjuntos de tipos son finitos, para cualquier juego bayesiano existe un juego bayesiano equivalente en probabilidad con creencias consistentes e, incluso, estocásticamente independientes.* La consistencia en creencias entra en juego sólo si deseamos que las funciones de pagos cumplan algunas propiedades específicas y los conjuntos de tipos no son finitos.

Equilibrios bayesianos

La decisión de un jugador en un juego bayesiano dependerá, en general, de su tipo. Sin embargo, como los otros jugadores no conocen su tipo y al escoger sus acciones tendrán en cuenta qué acciones escogería el jugador i para cada uno de sus posibles tipos, éste deberá considerar las acciones de todos sus posibles tipos, a pesar de saber el suyo propio. En pocas palabras, sólo podrá explotar su información si tiene en cuenta cómo hubiera actuado si hubiera sido de algún otro tipo que sólo él sabe que en realidad no es.

Un equilibrio de un juego bayesiano es un conjunto tal de conjeturas sobre la acción que escogería cada jugador en función de su tipo, que *cada tipo de cada jugador* maximiza su utilidad esperada dado su propio tipo y las (funciones) conjeturas sobre los otros jugadores. Formalmente, un tuple $\sigma = (\sigma^1,...,\sigma^n)$ forma un *equilibrio bayesiano* de un juego bayesiano G sí, y sólo sí, para cada jugador i. σ^i es una función desde T^i a S^i tal que, para todo t^i en T^i, se cumple:

$$\sum t_{-i}\ p^i(t_{-i}|t^i)\ \pi^i(\sigma(t),t) = \mathrm{Max}_{S^i} \sum t_{-i}\ p^i(t_{-i}|t^i)\ \pi^i((\sigma_{-i}(t_{-i}),s^i),t) \qquad (3)$$

$$\text{donde } (\sigma_{-i}(t_{-i}),s^i) = (\sigma^1(t^1),...,\sigma^{i-1}(t^{i-1}),s^i,\sigma^{i+1}(t^{i+1}),...\sigma^n(t^n))$$

La ecuación (2) indica que si el jugador i es del tipo t^i, y espera que los otros jugadores utilicen sus respectivas reglas de decisión $\sigma^j(.)$, entonces la acción $\sigma^i(t^i)$ es su acción óptima en el sentido de maximizar su utilidad esperada condicionada a su tipo t^i.

El equilibrio bayesiano es el concepto fundamental de solución para los juegos bayesianos. La intención de un concepto de solución es poder predecir cómo los jugadores tomarán sus decisiones. Sin conocer el tipo de un jugador, nuestra predicción debe ser una función de los distintos tipos. Si los jugadores entienden estas predicciones y la estructura del juego, cualquier predicción que no sea un equilibrio bayesiano sería improcedente, ya que al menos un tipo de un jugador tendría incentivos a desviarse de la prescripción.

Los equilibrios calculados en los ejemplos 1 y 2 de la introducción eran equilibrios bayesianos como el lector puede comprobar. Veamos ahora otro ejemplo original de Myerson (1985) muy ilustrativo sobre algunas características de estos equilibrios.

Ejemplo 3

Considérese un juego de dos jugadores con información incompleta caracterizado por los siguientes conjuntos:

$$S^1 = \{x^1,y^1\};\ S^2 = \{x^2,y^2\};\ T^1 = \{1\};\ T^2 = \{2a,2b\};\ p^1(2a|1) = 0.6;\ p^1(2b|1) = 0{,}4$$

Nótese que el jugador 1 tiene solamente un posible tipo y no posee información privada. Es un juego de información incompleta por el desconocimiento del jugador 1 sobre el tipo del jugador 2, al estilo del ejemplo 1. Finalmente, los pagos correspondientes, que son función de las acciones de ambos jugadores y del tipo del jugador 2, vienen dados por las matrices de la Figura 3.

Figura 3

Matrices de pagos del ejemplo 3

	x^2	y^2
x^1	1, 2	0, 1
y^1	0, 4	1, 3

$t^2 = 2a$

	x^2	y^2
x^1	1, 3	0, 4
y^1	0, 1	1, 2

$t^2 = 2b$

En este juego, x^2 es una estrategia dominante para el jugador tipo 2a, mientras que y^2 es una estrategia dominante para el tipo 2b. El jugador 1 desea alcanzar los pares (x^1, x^2) o (y^1, y^2); como que el tipo 2a tiene mayor probabilidad de ocurrencia según las creencias del jugador 1, éste escogerá x^1 en el juego de información incompleta. Por consiguiente, el único equilibrio bayesiano del juego es:

$$\sigma^1(1) = x^1, \sigma^2(2a) = x^2, \sigma^2(2b) = y^2$$

Este sencillo ejemplo nos ilustra los peligros de analizar las dos matrices separadamente. Si consideramos que el jugador 1 conoce el tipo del jugador 2, entonces, si éste es 2a, el equilibrio que prevalecería en el juego de información completa sería (x^1, x^2); por otro lado, si el jugador 2 es del tipo 2b, el equilibrio que prevalecería sería (y^1, y^2). Si consideramos solamente el análisis de las dos matrices por separado, nuestra predicción sería que el resultado del juego será (x^1, x^2) si el jugador 2 es del tipo 2a, y (y^1, y^2) si es del tipo 2b. Pero esta predicción es absurda en el juego con información incompleta en que el jugador 1 desconoce el tipo del jugador 2.

El jugador 1 adscribe dos acciones distintas al jugador 2 dependiendo de su tipo. El jugador 1 podría cumplir la predicción hecha en el párrafo anterior sólo si tuviera alguna forma de obtener información sobre el tipo del jugador 2. Sin embargo, el jugador 2 prefiere (y^1, y^2) sobre (x^1, x^2) si es del tipo 2a, y prefiere (x^1, x^2) sobre (y^1, y^2) si es del tipo 2b. En consecuencia, si permitiéramos comunicación entre los jugadores antes de que éstos escojan sus estrategias, el jugador 2 nunca revelaría la información precisa para realizar la predicción de información completa, ya que esta predicción le asigna los resultados menos deseados para cada tipo. Siempre intentaría manipular su información para obtener (y^1, y^2) si es del tipo 2a, y (x^1, x^2) si es del tipo 2b.

Finalmente, nótese que la predicción correcta en este juego con información incompleta es que se producirá el resultado (x^1, x^2) si el jugador 2 es 2a (prob. 0,6), o el resultado (x^1, y^2) si el jugador 2 es 2b (prob. 0,4), con unos pagos esperados para el jugador 1, el 2a y el 2b iguales a (0,6, 2,4). *

El juego del ejemplo 1 era de características muy similares a éste, excepto que dadas las creencias del jugador E, éste estaba indiferente con sus dos estrategias en el equilibrio bayesiano, dando lugar a una multiplicidad de equilibrios. La transformación del juego representado en la Figura 2 es la representación matricial del juego bayesiano, ya que las estrategias en este juego transformado coinciden con las funciones $\sigma(.)$ en el juego bayesiano.

Volvamos por un momento al ejemplo 2, la subasta de Vickrey, el juego que introdujo inicialmente el concepto de información incompleta en la bibliografía económica. En este juego tenemos dos jugadores, sus espacios de tipos y estrategias coinciden y son iguales a un intervalo de los números reales positivos (quizá $[0,0\infty]$), que es el soporte de la distribución F(.). Paralelamente, esta distribución nos da las probabilidades condicionales (independientes del tipo del jugador) sobre el tipo del otro jugador. Las funciones de pagos son claras:

$$\pi^i(b_1,b_2,v_1,v_2) = (v_1-b_i) \text{ si } b_i>b_j$$

$$= 0 \qquad \text{en cualquier otro caso.}$$

Claramente tenemos un juego con información incompleta, pero no es un juego finito. El equilibrio obtenido en la introducción es un equilibrio bayesiano donde $\sigma^i(v_i)=b(v_i)$ es una función de los tipos del jugador i para ambos jugadores. Nótese que, si analizamos el juego con información completa (cada jugador conoce el tipo del otro jugador), el juego no tiene equilibrio, ya que el jugador con la valoración más alta intentará ofertar un valor tan cercano como sea posible pero superior a la valoración del otro jugador. La predicción con información incompleta o con información completa, pero analizada antes de conocer la información, no coincide entre si.

Existencia del equilibrio: estrategias distribucionales

Todo juego con información incompleta puede transformarse, tal como hemos visto, en un juego bayesiano con información imperfecta. Si el juego bayesiano correspondiente es finito (número finito de jugadores, estrategias y tipos), siempre existe al menos un equilibrio en estrategias mixtas. En consecuencia, la existencia de un equilibrio bayesiano está asegurada en estos casos por el teorema de Nash, que se presentó en el primer capítulo de este número. Para el caso de un juego con un número infinito de estrategias y/o tipos, el problema de la existencia de un equilibrio, así como la existencia de equilibrios en estrategias puras, lo trataremos en esta subsección. Para ello nos referiremos fundamentalmente al trabajo de Milgrom y Weber (1983).

Aunque los resultados que presentamos aquí no dependen de la consistencia en las creencias, vamos a suponer que las creencias son consistentes con una distribución conjunta p^*. Las distribuciones marginales sobre T^i vienen dadas por P_i^*. Supondremos también que los conjuntos T^i son espacios métricos separables, y que los conjuntos S^i son espacios métricos compactos. Para exponer los resultados necesitamos una definición adicional:

Estrategias distribucionales: Una estrategia distribucional para el jugador i es una distribución de probabilidad μ^i sobre el conjunto $T^i x S^1$ tal que la distribución marginal sobre T^i coincide con P_i^*. Esto es, para todo subconjunto D de T se cumple:

$$\mu^i(DxS^i) = p_i^*(D) = p^*(T^1x...xT^{i-1}xDxT^{i+1}x...xT^n).$$

Tal como los autores muestran en su artículo, las estrategias distribucionales son las naturales para estudiar juegos con información incompleta cuando los tipos y las estrategias son números reales y las estrategias de equilibrio son funciones monótonas. Estas situaciones, bastante usuales en la economía, se presentan en problemas de subastas[1] como el ejemplo 2 de la introducción, y en otras situaciones de la economía industrial[2], como precios límites y comportamiento predatorio. Los autores ilustran esta utilización con el juego conocido como la guerra de supervivencia (también llamado "subasta de un dólar" o "subasta en que ambos pagan").

Ejemplo 4: Guerra de supervivencia

En su interpretación de conflicto entre animales, la historia podría ser la siguiente: dos animales luchan por un premio valioso, como por ejemplo comida. El animal i está dispuesto a invertir un tiempo t^i en la lucha (su tipo). Si lucha durante un tiempo s y su competidor se retira, su pago será t^i-s. Si, por el contrario, él se retira después de luchar un tiempo s, su pago es -s. Cada animal conoce su tipo t^i, pero no el del contrario. Se supone que estos tipos son independientes y provienen de una misma distribución absolutamente continua F(.) sobre R_+, con densidad f(.).

Como el juego es simétrico, buscaremos un equilibrio de Nash simétrico. Supongamos que el animal 1 "cree" que su oponente utilizará una estrategia creciente y diferenciable $\sigma(t^2)$ función de su tipo. Resolviendo el problema de la misma forma que el ejemplo 2 (se recomienda como ejercicio para el lector) y utilizando la condición $\sigma(0)=0$, se obtiene como estrategia óptima:

$$\sigma(t) = \int_{[0,1]}[\, s\, f(s)/(1-F(s))]\, ds$$

El par de estrategias (σ,σ) es el único equilibrio simétrico del juego. Nótese que éste es un equilibrio en estrategias puras.

Una variación interesante del juego es considerar que la distribución F concentra toda su masa en un sólo valor v. En ese caso, no existe ningún equilibrio simétrico en estrategias puras y debemos buscar un equilibrio en estrategias mixtas. Nótese que éste es un juego con información completa. Sea s el tiempo que se desea aguantar en la lucha. Sea G(s) una distribución de probabilidad correspondiente a una estrategia mixta. Maximizando los pagos esperados y añadiendo a la condición de simetría la condición que G(0)=0 en el equilibrio, la estrategia mixta de equilibrio viene dada por:

$$G^*(s) = 1 - \exp(-s/v)$$

Por consiguiente, en el equilibrio, cada animal *randomiza* su esfuerzo utilizando una distribución exponencial de media v, el valor del premio. Estas dos variantes del mismo juego dan como resultado dos prescripciones aparentemente muy distintas: un equilibrio en estrategias puras, en un caso, y uno en estrategias mixtas, en el otro. Sin embargo, ambos resultados pueden compaginarse bajo la óptica de las estrategias distribucionales. Para ello, considérese la distribución de las acciones del animal inducidas por el equilibrio en estrategias

---

[1] Por ejemplo, Engelbrechl-Wiggans, Milgrom y Weber (1983), Milgrom (1981). Milgrom y Weber (1982a y b), Wilson (1977).

[2] Por ejemplo, Milgrom y Roberts (1982).

puras desde la perspectiva de un observador externo que no conoce los tipos. Milgrom y Weber prueban que si la distribución F concentra su masa en un intervalo alrededor del valor v y de longitud 2ε, la distribución inducida por el equilibrio en estrategias puras converge hacia la distribución exponencial de media v cuando e tiende a cero. En consecuencia, los comportamientos prescritos son consistentes entre sí.

Los autores también muestran cómo usando estrategias distribucionales se pueden resolver ambos problemas simultáneamente facilitando la deducción de las consecuencias empíricas del modelo como la convergencia en las prescripciones que comentábamos en el párrafo anterior. *

Usando este tipo de estrategias y con algunas condiciones adicionales, fundamentalmente en relación a la continuidad de las funciones de pagos y de la estructura de información, los autores prueban la *existencia de equilibrios en estrategias distribucionales*, y la *convergencia de equilibrios*, en juegos "cercanos" al equilibrio en el juego límite, mostrando la robustez del equilibrio. Cuando la distribución p^* no tiene puntos con probabilidad positiva, entonces prueban que el conjunto de estrategias puras es denso en el conjunto de estrategias distribucionales y, por consiguiente, siempre tenemos ε-equilibrios en estrategias puras. Con otras condiciones de menor orden y siempre que el conjunto de posibilidades de las incertidumbres bajo el control de la naturaleza sean finitas, existe un *equilibrio en estrategias puras*. Para más detalles se puede consultar el trabajo original, Milgrom y Weber (1983).

Juegos repetidos con información incompleta

Los juegos analizados hasta el momento en este capítulo han sido juegos estáticos. En esta sección deseamos dar unas pinceladas sobre los juegos con información incompleta en situaciones repetitivas. El énfasis en estos juegos está en el uso estratégico de la información: cuándo y cómo revelarla, cuándo y cómo ocultarla, cuándo debe creerse la información recibida y cuándo no, etc.

Muchos de los trabajos en esta área tienen su origen en los realizados por algunos autores bajo el auspicio de la Agencia para el Desarme y el Control de Armamento[3] (Arms Control and Disarmament Agency) en el período 1966-1968. Su objetivo era estudiar desde una perspectiva teórica qué tipo de recomendaciones y qué nivel de información debía suministrarse a los negociadores sobre el control del armamento nuclear. Desde entonces se han generado numerosos trabajos aportando soluciones originales a muchos problemas planteados e irresolubles durante años. A pesar de que aquí plantearemos solamente los casos más sencillos, estos trabajos emplean ideas matemáticas que podrían considerarse entre las más sorprendentes y originales en la teoría de juegos. Todavía hoy en día quedan problemas sin resolver en esta área, con pocos teóricos preparados para afrontarlos.

El caso más sencillo que estudiaremos con cierto detalle corresponde a *juegos de suma cero con información incompleta en un solo lado*. Tenemos dos jugadores que se enfrentan a un juego de suma cero repetido infinitas veces. El juego repetido puede ser cualquiera de un conjunto de juegos matriciales $\{A_k\}$, k=1,...,K. Cada matriz A_k tiene m filas y n columnas. El jugador 1

[3] Reports of the US Arms Control and Disarmament Agency/ST-80. ST-116 y ST-143, de 1966, 1967 y 1968, publicados por Matemática, Princeton, NJ.

escoge la fila, y el jugador 2 escoge la columna. Así pues, el jugador 1 dispone de m estrategias puras, y el jugador 2, de n estrategias en el juego estático.

La secuencia del juego es la siguiente. Antes de empezar el juego, la naturaleza escoge la matriz a jugar con una distribución de probabilidad $p=(p_1,...,P_K)$. Sea k el resultado de esta lotería. El jugador 1 es informado del resultado y sabe que la matriz escogida es A_k. El jugador 2 no tiene más información que la correspondiente a la distribución de probabilidad p. En cada etapa del juego infinito el jugador 1 escoge una fila, y el jugador 2, una columna simultánea e independientemente. Los jugadores son informados de la elección de los jugadores (i.j), pero no del pago correspondiente. Al final del juego infinito, el jugador 2 debe pagar al jugador 1 el límite del valor medio de los pagos resultados de cada etapa. Nótese que un jugador está completamente informado del juego escogido por la naturaleza, mientras que el otro no dispone de información. Sin embargo, la distribución p es de conocimiento compartido.

Consideremos primero este juego con una sola etapa. Sea τ una estrategia mixta para el jugador 2. Sea $\sigma=(\sigma_k)$ una estrategia mixta para el jugador 1, donde σ_k es la estrategia a jugar si el estado de la naturaleza es k. Si el juego tiene una sola etapa, el jugador 1 podrá hacer uso de su información para maximizar su pago esperado. El jugador 2 tendrá que jugar su estrategia óptima teniendo en cuenta la ventaja del jugador 1. Podemos resolver un juego bayesiano como hacíamos en la sección anterior.

Antes de pasar a la situación repetitiva, nos convendrá una definición. Si el jugador 1 utiliza su información en alguna etapa, estará revelando parte de esta información al jugador 2. No puede explotar su información sin revelarla, al menos parcialmente. Puede, sin embargo, escoger una estrategia que no revele información. En general, si el jugador 1 utiliza una estrategia σ, y toda la información a priori del jugador 2, en la etapa t, está representada por p^t, después de esta etapa, el jugador 2 que haya observado la elección de la fila i, puede actualizar esta probabilidad utilizando el teorema de Bayes. Esto es:

$$p_k^{t+1} = p_k^t \sigma_k(i) / \Sigma_j p_j^t \sigma_j(i)$$

Una estrategia mixta σ para el jugador 1 se conoce como *estrategia de no revelación*, si la distribución a posteriori del jugador 2 es exactamente igual a su distribución a priori para cualquier movimiento que haya podido observar el jugador 2. En este caso, para que σ sea de no revelación, es preciso que $\sigma_1= \sigma_2=...= \sigma_K$. Eso implica que no se puede hacer uso de la información sin revelarla.

Sea $A(p)=\Sigma_k P_k A_k$. Esto es, la matriz resultado de ponderar las distintas matrices según las probabilidades iniciales que el jugador 2 le asigna a cada matriz. Sea u(p) = val(A(p)), el valor del juego A(p). En este juego el jugador 1 solamente utiliza estrategias de no revelación.

Para cualquier función f(p), definimos como *con*(f(p)) a la menor función cóncava que es mayor o igual a f(p) para todo p en [0,1]. El resultado fundamental en este caso es el siguiente:

Teorema (Aumann y Maschler, 1968; Zamir, 1971-1972)

El valor del juego infinito v(p) existe y es igual a con(u(p)) para cualquier p en [0,1]. Además, este valor coincide con el límite del valor del juego con t etapas, cuando t tiende a infinito.

Veamos la intuición de este resultado antes de explicar las estrategias óptimas de cada jugador. Por un lado, el valor del juego debía ser una función cóncava, ya que la información tiene siempre valor positivo en este juego, al ser siempre posible no utilizarla. Además, está claro que el jugador 1 debe poder asegurarse al menos u(p). Por consiguiente, $v(p) \geq$ *con*(u(p)). La otra desigualdad es un poco más complicada, ya que depende de las posibilidades del jugador 2. En efecto, el jugador 2 tiene una estrategia que le permite asegurarse al menos *con*(u(p)).

Veamos primero la estrategia del jugador 1. Por un conocido resultado en geometría, se sabe que siempre existen vectores de probabilidades $p^1,\dots,p^s$ con $s \leq K$, y unos escalares positivos $x^1,\dots,x^s$ que cumplen $\sum_i x^i = 1$, tales que se cumple:

$$\sum_i x^i p^i = p \qquad \text{y} \qquad \sum_i x^i\, u(p^i)\ \mathit{con}(u(p))$$

Dados estos vectores de probabilidades $p^1,\dots,p^s$ (de K componentes cada uno), *la estrategia óptima del jugador 1* es como sigue. Al iniciar el juego, si el estado de la naturaleza es k, escoger $i=1,\dots,s$ con probabilidad $x^i p^i{}_k/P_k$. En todas las otras etapas del juego, jugar la estrategia (de no revelación) óptima en el juego $A(p^i)$.

Nótese que la estrategia óptima es una estrategia de revelación parcial de la información. Es fácil comprobar que la probabilidad total de jugar σ_i es exactamente x^i. Si el jugador 1 utiliza repetitivamente la estrategia σ_i, las creencias del jugador 2 sobre el estado de la naturaleza serán:

$$\Pr(k|\sigma_i) = \Pr(\sigma_i|k)\, p_k/\Pr(\sigma_i) = (x^i p^i{}_k/p_k)\, p_k/x^i = p^i{}_k$$

En consecuencia, *el jugador 1 revela parcialmente su información,* de forma que las creencias del jugador 2 coinciden con p^1 con probabilidad x^1 (antes del movimiento de la naturaleza). El jugador 1 puede asegurarse con esta estrategia el valor $u(p^i)$ con esta probabilidad. En consecuencia, tiene un valor esperado igual a $\sum_i x^i u(p^i) =$ *con*(u(p)), que es v(p).

Hemos visto cómo el jugador 1 puede asegurarse el valor v(p). Veamos ahora *la estrategia del jugador 2*, empezando de forma intuitiva. Como veíamos hace un momento, el jugador 1 revela parcialmente su información a base de jugar σ_i. El jugador 2 puede ir actualizando sus probabilidades sobre el juego que se está jugando. La secuencia de posteriores que se vayan obteniendo forman una martingala. Las martingalas convergen, y deberá converger al valor p^i. En consecuencia, el jugador 2 puede asegurarse un valor $u(p^i)$ jugando la estrategia óptima en ese juego. En definitiva, teniendo en cuenta la *randomización* inicial del jugador 1, el valor asegurado por el jugador 2 es v(p), con lo cual se prueba la otra desigualdad.

De hecho, ésta no es la estrategia óptima del jugador 2, ya que éste debe protegerse en contra de cualquier estrategia, y ésta es sólo una mejor respuesta a la estrategia del jugador 1. La estrategia óptima del jugador 2 es un tanto complicada y poco intuitiva, ya que se genera con un procedimiento muy distinto, el llamado *estrategias de Blackwell* (véase Blackwell, 1956, para comprender este procedimiento fundamental en juegos repetidos con información incompleta). Esencialmente, consiste en una estrategia de inferencia estadística que le permite aproximar con probabilidad 1 un conjunto en el espacio de pagos de K dimensiones, una por cada posible juego. El conjunto aproximable por la estrategia óptima asegura al jugador 2 un pago no superior a v(p) (véase Aumann y Maschler, 1967; Stearn, 1967, y Kohlberg, 1975a).

Los resultados expuestos para juegos de suma cero con información incompleta en un lado son algo más generales. En particular, los resultados se generalizan al caso en que los jugadores no observan los movimientos en cada etapa del juego, sino que cada matriz A_k tiene asociada una matriz informativa que indica qué deben conocer los jugadores después de una etapa en función de k y de la fila y columna escogidas. Para este caso, más general e interesante, los resultados son todavía ciertos. Para más información puede consultarse Aumann y Maschler (1967, 1868), Zamir (1971-1972, 1973a) o Ponsard y Zamir (1973) para una versión secuencial de estos juegos. En estos trabajos se obtienen también resultados sobre la velocidad de convergencia.

La convergencia del valor del juego finito, cuando el número de etapas tiende a infinito, al valor del juego infinito, es particularmente relevante. No es fuera de lo usual que el valor de un juego infinito no sea el límite de los finitos. Este resultado se debe a la estructura recursiva de estos juegos originada por la propiedad de martingala de las posteriores calculadas por el jugador 2. Veremos más adelante que la falta de estructura recursiva es origen de serios problemas en otros juegos repetidos con información incompleta (véase, al respecto, Zamir, 1973b).

Dentro de los juegos de suma cero, el paso siguiente es considerar la *falta de información en ambos lados*. Podemos considerar que hay varios juegos identificados por dos parámetros, a y b. La naturaleza escoge una matriz A (a, b), donde a y b se escogen de entre unos conjuntos finitos usando las distribuciones p y q respectivamente. El jugador 1 es informado del valor a, y el jugador 2, del valor b. El resto del juego es como el caso anterior.

Sea *vex*(f(q)) la mayor función convexa menor o igual que f(q) para todo q en [0.1]. Sea A(p.q) la matriz media ponderada de las posibles matrices según las ponderaciones p y q. Sea u(p.q) el valor del juego en una sola etapa con la matriz A(p.q). El resultado fundamental en este caso es:

Teorema

(i) *El jugador 1 puede garantizarse el valor* $con_p(vex_q(u(p,q)))$.

(ii) *El jugador 2 puede garantizarse el valor* $vex_q(con_p(u(p,q)))$.

(iii) $con_p(vex_q(u(p,q))) \leq vex_q(con_p(u(p,q)))$.

(iv) *Si evaluados según las probabilidades* p^0,q^0 *iniciales, ambos valores coinciden, entonces el juego infinito tiene valor y éste es exactamente esta cantidad,* $v(p^0,q^0) = vex_q(con_p(u(p,q))) = con_p(vex_q(u(p,q)))$ *(evaluados en* p^0,q^0*).*

De nuevo, estos resultados pueden generalizarse a casos donde las probabilidades sobre la selección de la matriz a jugar no son independientes (Mertens y Zamir, 1971-1972). Otras generalizaciones con matrices de información pueden consultarse en Mertens (1972), Zamir (1973b) o Mertens y Zamir (1977). En estos trabajos también se analiza la convergencia del juego finito al valor del juego infinito la estructura recursiva y la velocidad de convergencia. La versión secuencial de juegos con información incompleta en los dos lados puede verse en Ponssard (1975a) y Ponssard y Sorin (1978b).

Los juegos repetidos con información incompleta que no tienen una estructura recursiva son más complicados de resolver y pueden no tener valor. Estos juegos se estudian en Mertens y Zamir (1976a) y Waternaux (1981). Kohlberg (1974) y Kohlberg y Zamir (1974) estudian aquellos juegos en los cuales hay un estado absorbente tal que si es alcanzado el pago se mantiene constante en cada etapa sucesiva. Algunos juegos sin estructura recursiva pueden transformarse en juegos con estados absorbentes.

El caso correspondiente a los juegos de suma no cero se inició con Aumann, Maschler y Stearns (1968) y resulta tremendamente más complejo que el caso de suma cero. Un estudio más completo de este caso puede encontrarse en Hart (1985). Finalmente, el caso correspondiente a juegos de suma cero, pero utilizando un factor de descuento en el cálculo de los pagos del juego, fue analizado por Mayberry (1967) con algún resultado sorprendente: incluso en el más simple de los casos, v(p) es una función cóncava de p, pero es no diferenciable para cualquier valor racional de p a pesar de ser diferenciable en casi cualquier punto debido a la concavidad.

La bibliografía al final del capítulo presenta una exhaustiva referencia a los principales trabajos en esta interesante área de los juegos repetidos con información incompleta.

Juegos bayesianos con comunicación

Volvamos al caso de los juegos estáticos con información incompleta, cuya modelación hemos visto que se puede lograr a través de los juegos bayesianos. Hasta ahora hemos considerado que la estrategia de cada jugador sólo podía depender de su propio tipo. En esta sección consideraremos qué ocurre si los jugadores en un juego bayesiano pueden comunicarse. En toda la sección, que se basa en Myerson (1985), consideraremos que los conjuntos de estrategias y tipos son finitos para todos los jugadores.

Supongamos que los jugadores pueden comunicarse a través de un mediador que empieza preguntando a los jugadores privadamente sobre su tipo, y que una vez recogida esta información, recomienda una acción o estrategia a cada jugador. Esta recomendación no es vinculante para los jugadores y puede ser una función determinista o probabilística de los mensajes recibidos como respuesta de los jugadores. Sean $(t^1,\dots,t^n)$ los mensajes enviados por los jugadores al mediador. Denotaremos como $\mu(s^1,\dots,s^n|t^1,\dots,t^n) = \mu(s|t)$ la probabilidad condicional de que el mediador recomiende a los jugadores las estrategias $s^1,\dots,s^n$, si los mensajes recibidos eran $t^1,\dots,t^n$. Obviamente se debe cumplir, ya que μ es una distribución de probabilidad que:

$$\sum_S \mu(s|t) = 1 \;\text{ y }\; \mu(s|t) \geq 0, \;\; \forall s \in S, \; \forall t \in T \qquad (4)$$

En general, a cualquier función de μ: SxT --->R que satisface (4) se le llama un *mecanismo* (de *coordinación*) para el juego bayesiano G.

Si el mediador utiliza un mecanismo cualquiera, no será necesariamente verdad que los jugadores tienen un incentivo adecuado a revelar su verdadero tipo. Adicionalmente, los jugadores pueden desviarse de las recomendaciones del mediador si está en su interés hacerlo. De hecho, el mecanismo transforma el juego bayesiano en otro juego bayesiano, al que se conoce como *juego bayesiano de comunicación*. Decimos que un mecanismo μ es compatible con los incentivos (en un sentido bayesiano introducido por D'Aspremont y Gerard-Varet, 1979), si, para todos los jugadores, decir la verdad al mediador y obedecer sus recomendaciones es un equilibrio bayesiano cuando el mediador utiliza el mecanismo μ. Esto es, μ es compatible con los incentivos, sí, y solo sí:

$$\sum_{t_{-i}} \sum_{S} p^i(t_{-i}|t^i)\mu(s|t)\pi^i(s,t) \geq \sum_{t_{-i}} \sum_{S} p^i(t_{-i}|t^i)\, \mu(s|t_{-i},\tau^i)\, \pi^i((s_{-i},\delta^i),t)$$

$$\forall i,\ \forall t^i \in T^i,\ \forall \tau^i \in T^i,\ \forall \delta^i : S^i \text{--->} S^i \qquad (5)$$

Si el mediador utiliza un mecanismo compatible con los incentivos y cada jugador comunica con él de forma independiente y confidencial, entonces ningún jugador puede salir ganando (en el sentido de aumentar su utilidad esperada) mintiendo al mediador o desobedeciendo su recomendación, mientras los otros se mantengan en sus recomendaciones. Por otro lado, no podemos esperar que los jugadores participen honestamente y obedezcan las recomendaciones si el mediador utiliza un mecanismo que no es compatible con los incentivos.

En general, pueden haber distintos equilibrios bayesianos en el juego de comunicación, incluso cuando el mecanismo μ que induce el juego es compatible con los incentivos. Además, podemos considerar mecanismos de coordinación más generales, en los cuales los mensajes enviados por los jugadores o recibidos por ellos no tienen por qué pertenecer a los conjuntos T^i y S^i, respectivamente. Sin embargo, para cualquier mecanismo de coordinación y para cualquier equilibrio bayesiano del correspondiente juego de comunicación, existe un mecanismo equivalente compatible con los incentivos con el cual todo tipo de cada jugador recibe la misma utilidad esperada (cuando todos los jugadores son honestos y obedientes) que en el equilibrio bayesiano del mecanismo original. En consecuencia, no existe ninguna pérdida de generalidad en suponer que los jugadores comunican con un mediador que primero pregunta su tipo y luego les comunica la mínima información que precisan para guiar sus acciones, y realiza esta operación de forma tal que los jugadores no tienen ningún incentivo a mentir. Este resultado ha sido obtenido por varios autores independientemente y se conoce como el *principio de la revelación* (véase Dasgupta, Hammond y Maskin, 1979; Harris y Townsend, 1981; Holmström, 1977, y Myerson, 1979, 1982).

Dados un mecanismo cualquiera y un equilibrio del juego de comunicación, es fácil construir, con la ayuda de un mediador, un mecanismo compatible con los incentivos equivalente. Primero, el mediador pregunta de forma confidencial a los jugadores su tipo. Después, el mediador debe calcular qué mensaje hubiera enviado un jugador del tipo revelado sometido al mecanismo y al equilibrio en cuestión. Seguidamente se calculan las recomendaciones que este mecanismo hubiera hecho y las acciones que los jugadores hubieran seguido de recibir estas recomendaciones en el equilibrio. Finalmente, el mediador aconseja estas acciones a cada jugador. El mecanismo resultante es compatible con los incentivos, ya que en el caso de que alguien desee desviarse, el equilibrio original dejaría de cumplir las condiciones de equilibrio.

El conjunto de mecanismos compatibles con los incentivos es un conjunto convexo y cerrado que se caracteriza por el sistema de inecuaciones lineales en μ que vienen dadas por (4) y (5). Para seleccionar entre los distintos mecanismos compatibles con los incentivos, podemos considerar, al menos, aquellos en los cuales ningún jugador puede ganar más sin que algún otro jugador pierda. Para ello, decimos que un mecanismo μ es *incentivo-eficiente* si μ es compatible con los incentivos y no existe ningún otro mecanismo μ’ compatible con los incentivos tal que:

$$\Sigma_{t_{-i}}\Sigma_{s}\, p^{i}(t_{-i}|t^{i})\, \mu'(s|t)\, \pi^{i}(s,t) \geq \Sigma_{t_{-i}}\Sigma_{s}\, p^{i}(t_{-i}|t^{i})\, \mu(s|t)\, \pi^{i}(s,t), \qquad \forall i, \forall t^{i} \in T^{i}$$

con al menos una desigualdad estricta. O sea, no existe ningún otro mecanismo compatible con los incentivos tal que ofrezca una mayor utilidad esperada a algún tipo de algún jugador sin disminuir la utilidad esperada de los otros jugadores o tipos. Conversamente, si μ no es incentivo-eficiente, entonces es de conocimiento compartido, y todos los jugadores preferirán usar otro mecanismo compatible con los incentivos. Esta es, pues, la noción adecuada como base normativa para el análisis del bienestar asociado a los mecanismos de coordinación, ya que requerimos que el mecanismo sea eficiente sujeto a las restricciones de compatibilidad con los incentivos. Véase Holmström y Myerson (1983) para un análisis más detallado de estos conceptos. Myerson (1982) caracteriza el conjunto de mecanismos incentivo-eficientes para una clase más general de problemas bayesianos de incentivos que incluye, como caso particular, los juegos bayesianos.

Conclusiones

Las dificultades que se presentan cuando los agentes económicos poseen información privada fueron ilustradas de forma dramática por Akerlof (1970) en el mercado de coches usados cuando la calidad del coche sólo es observada, antes de la transacción, por el vendedor. Con unas sencillas suposiciones sobre el valor del coche para ambas partes, se concluye que «el comprador debe rechazar cualquier precio que el vendedor esté dispuesto a aceptar», con lo que hay una ruptura total del mercado. La lógica de este argumento es la misma que utilizaba Groucho Marx al afirmar «no quiero ser miembro de ningún club que esté dispuesto a aceptarme». Cuando el vendedor acepta un precio, el comprador sabe, por la información que deduce, que no debe aceptarlo. Sin introducir garantías o la posibilidad de utilizar un auditor imparcial, el mercado desaparece a pesar de que habría posibilidades de transaccionar si hubiera información completa.

Considérese una negociación entre dos individuos con información privada. Ellos hacen afirmaciones que pueden ser verdaderas o falsas; utilizan “faroles”, amenazan, interaccionan para convencerse mutuamente sobre sus preferencias y sus restricciones. Finalmente, pueden llegar a un acuerdo o romper la negociación. Cada parte conoce sus propias preferencias y adopta una estrategia privada que especifica cómo debe actuar en cada etapa de la negociación en función de la historia de la misma.

Una consideración importante al escoger nuestra estrategia, frecuentemente desestimada, es el hecho de que el otro individuo no conoce nuestras preferencias y restricciones, o sea, no conoce nuestro tipo, y continuamente estará actualizando sus creencias sobre esta información. El contrincante basará sus acciones en sus creencias sobre nuestro tipo. Por consiguiente, al decidir nuestras propias acciones, debemos anticipar las conclusiones que él sacará sobre nosotros: debemos preguntarnos cómo actuaríamos si hubiéramos sido de cualquier otro tipo distinto del que realmente somos. Este razonamiento es la esencia que hay detrás de los juegos bayesianos como modelo para los juegos con información incompleta.

Podemos visualizar la preparación para la negociación como una discusión entre el individuo y sus otros *alter egos*, en la cual los participantes deben decidir una presentación coordinada frente al mundo exterior. Unos tipos querrán engañar (*bluff*), imitando la estrategia privada de algún otro tipo en un intento de persuadir al mundo que ellos son de ese otro tipo. Otros tipos querrán "señalar", revelando su verdadera información. Los distintos tipos pueden tener intereses en conflicto; estos conflictos entre tipos deberán resolverse antes que el auténtico tipo pueda decidir cómo actuar. La resolución final entre los tipos no puede ser un contrato vinculante; sólo un tipo existe realmente; los otros no pueden penalizarlo por romper un acuerdo. La resolución debe ser compatible con los incentivos de cada tipo.

Para tener en cuenta estas consideraciones, definimos la estrategia como una especificación de la acción a seguir para cada uno de los posibles tipos. Sólo una de estas acciones se implementará, la del auténtico tipo, pero es necesaria una estrategia completa para todos los tipos, ya que una estimación de ésta es la información que precisa el contrincante para actualizar sus probabilidades sobre nuestro tipo. En el equilibrio bayesiano, la estrategia debe ser la óptima para *cada tipo de cada jugador*, no sólo para el verdadero tipo del jugador.

Esta es la filosofía subyacente en todo el contenido de este capítulo. El mensaje principal es la necesidad que tienen los jugadores de considerar sus *alter egos* o tipos alternativos. El modelo básico de los juegos de información incompleta se ha descrito en la sección 2, junto al concepto de equilibrio bayesiano y algunas consideraciones sobre su existencia. El aprendizaje fundamental de esta sección es la necesidad de considerar los *juegos bayesianos como la representación adecuada de los juegos con información incompleta.*

La sección 3 ha estado dedicada a los juegos repetidos con información incompleta. Esta es un área muy interesante en los juegos con información incompleta que intenta estudiar un problema muy fundamental: qué uso debe hacerse de la información en una negociación repetitiva en el tiempo. ¿Debo revelar u ocultar la información? ¿Debo creerme una información revelada o descartarla? En pocas palabras, el problema central del estudio es *el uso estratégico de la información privada en una negociación repetitiva.*

Finalmente, hemos cubierto la posibilidad de comunicación en el juego estático para encontrarnos con un nuevo juego bayesiano, un juego de comunicación, donde el problema central consiste en diseñar un *mecanismo de coordinación* orientado a lograr soluciones eficientes en el juego. Hemos visto que, gracias al *principio de la revelación*, podemos concentrarnos en el estudio de *mecanismos directos* (restricción de los mensajes a los posibles tipos y/o acciones de los jugadores), en los cuales la participación honesta y obediente de los jugadores es *compatible con los incentivos* de los mismos. De estos mecanismos, nos interesan aquellos que sean *incentivo-eficientes*, o sea, eficientes sujetos a las restricciones de compatibilidad de los objetivos.

Con estos temas no hemos, ni mucho menos, completado la gama de modelos y consideraciones que se pueden hacer alrededor del tema de la información incompleta. Este tema saldrá repetidamente en los diversos artículos de este número, ya que tiene mucha importancia, tanto en la teoría de los juegos como en sus aplicaciones en teoría económica, e incluso en negociaciones y estrategias competitivas. La información es un activo muy importante si de él se hace un uso inteligente y adecuado.

Cabe remarcar un área que se ha quedado en el tintero, la de negociaciones con información incompleta. La razón estriba en que este capítulo forma parte todavía del bloque dedicado a los juegos no cooperativos. Al avanzar en la dirección de los juegos cooperativos y de la negociación, volverá a tratarse, con la profundidad que merece, el tema de la información incompleta en negociaciones y juegos cooperativos.

Referencias

Akerlof, G. (1970), "The Market for Lemons: Qualitative uncertainty and the Market Mechanism", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 84.

Armbruster, W. y W. Böge (1979), "Bayesian Game Theory", en O. Moeschlin y D. Pallaschke (eds.), "Game Theory and Related Topics", Noth-Holland.

Aumann, R. J. (1976), "Agreeing to disagree", *Annals of Statistics*, vol. 4.

Aumann, R. J. y M. Maschler (1966), "Game Theoretic Aspects of Gradual Disarmament", Report of the US Arms Control and Disarmament Agency/ST-80, capítulo V.

Aumann, R. J. y M. Maschler (1967), "Repeated Games with Incomplete Information: A survey of Recent Results", Report of the US Arms Control and Disarmament Agency/ST-116, capítulo III.

Aumann, R. J. y M. Maschler (1968), "Repeated Games with Incomplete Information: The Zero-Sum Extensive Case", Report of the US Arms Control and Disarmament Agency/ST-143, capítulo III.

Aumann, R. J., M. Maschler y R. E. Stearns (1968), "Repeated Games with Incomplete Information: A Approach to the Non-Zero-Sum Case", Report of the US Arms Control and Disarmament Agency/ST-143, capítulo IV.

Bishop, D. T., C. Cannings y J. Maynard Smith (1978), "The War of Attrition with Random Rewards", *Journal of Theoretical Biology*, 74.

Blackwell, D. (1956), "An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs", *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 6, nº 1.

Dasgupta, P. S., P. J. Hammond y E. S. Maskin (1979), "The Implementation of Social Choice Rules: Some Results on Incentive Compatibility", *Review of Economic Studies*, vol. 46.

D'Aspremont, C. y L. A. Gerard-Varet (1979), "Incentives and Incomplete Information", *Journal of Public Economics*, vol. 11.

Engelbrecht-Wiggans, R., P. Milgrom y R. J. Weber (1983), "Competitive Bidding with Proprietary Information", *Journal of Mathematical Economics*, vol. 11.

Harris, M. y M. Townsend (1981), "Resource Allocation under Asymmetric Information", *Econometrica*, vol. 49.

Harsanyi, J. C. (1967-1968), "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players", *Management Science*, vol. 14, págs. 159-189, 320-334 y 486-502.

Hart, S. (1985), "Non-Zero-Sum Two-Person Repeated Games with Incomplete Information", *Mathematics of Operations Research*, vol. 10.

Holmstrom, B. (1977), "On Incentives and Control in Organizations", Ph. D. dissertation, Stanford University.

Holmstrom, B. y R. B. Myerson (1983), "Efficient and Durable Decision Rules with Incomplete Information", *Econometrica*, vol. 51.

Kohlberg, E. (1974), “Repeated Games with Absorbing States”, *Annals of Statistics*, vol. 2.

Kohlberg, E. (1975a), “Optimal Strategies in Repeated Games with Incomplete Information”, *International Journal of Game Theory*, vol. 4.

Kohlberg, E. (1975b), “The Information Revealed in Infinitely-Repeated Games of Incomplete Information”, *International Journal of Game Theory*, vol. 4.

Kohlberg, E. y S. Zamir (1974), “Repeated Games of Incomplete Information: The Symmetric Case”, *Annals of Statistics*, vol. 2.

Mayberry, J. (1967), “Discounted Repeated Games with Incomplete Information”, Report of the US Arms Control and Disarmament Agency/ST-116, capítulo V.

Mertens, J. F. (1971-1972), “The Value of Two-Person Zero-Sum Repeated Games-The Extensive Case”, *International Journal of Game Theory*, vol. 1.

Mertens, J. F. (1973), “A Note on ’The Value of Two-Person Zero-Sum Repeated Games-The Extensive Case”’, *International Journal of Game Theory*, vol. 2.

Mertens, J. F. y S. Zamir (1971-1972), “The Value of Two-Person Zero-Sum Repeated Games with Lack of Information in both Sides”, *International Journal of Game Theory*, vol. 1.

Mertens, J. F. y S. Zamir (1975), “The Maximal Variation of a Bounded Martingale”, *Israel Journal of Mathematics*, vol. 27.

Mertens, J. F. y S. Zamir (1976a), “On Repeated Games without a Recursive Structure”, *International Journal of Game Theory*, vol. 5.

Mertens, J. F. y S. Zamir (1976b), “The Normal Distribution and Repeated Games”, *International Journal of Game Theory*, vol. 5.

Mertens, J. F. y S. Zamir (1977), “Minmax and Maxmin of Repeated Games with Incomplete Information”, *International Journal of Game Theory*, vol. 6.

Mertens, J. F. y S. Zamir (1982), “Formalization of Harsanyi’s Notions of ’Type’ and ’Consistency’ in Games with Incomplete Information”, C.O.R.E. Discussion paper.

Milgrom, P. (1981), “Rational Expectations, Information Acquisition, and Competitive Bidding”, *Econometrica*, vol. 49.

Milgrom, P. y D. J. Roberts (1982), “Limit Pricing and Entry under Incomplete Information: An Equilibrium Analysis”, *Econometrica*, vol. 50.

Milgrom, P. R. y R. J. Weber (1981), “Topologies on Information and Strategies in Games with Incomplete Information”, en O. Moeschlin y D, Pallaschke (eds.), “Game Theory and Mathematical Economics”, North-Holland Pub. Company.

Milgrom, P. R. y R. J. Weber (1982a), “The Value of Information in a Sealed-Bid Auction”, *Journal of Mathematical Economics*, vol. 10.

Milgrom, P. R. y R. J. Weber (1982b), “A Theory of Auctions and Competitive Bidding”, *Econometrica*, vol. 50.

Milgrom, P. R. y R. J. Weber (1983), “Distributional Strategies for Games with Incomplete Information”, *Mathematics of Operations Research.*

Myerson, R. B. (1979a), “Incentive Compatibility and the Bargaining Problem”, *Econometrica*, vol. 47.

Myerson, R. B. (1979b), “An Axiomatic Derivation of Subjective Probability, Utility and Evaluation functions”, *Theory and Decision*, vol. 11.

Myerson, R. B. (1982), “Optimal Coordination Mechanisms in Generalized Principal-Agent Problems”, *Journal of Mathematical Economics*, vol. 11.

Myerson, R. B. (1984a), “Two-Person Bargaining Problems with Incomplete Information”, *Econometrica*, vol. 52.

Myerson, R. B. (1984b), “Cooperative Games with Incomplete Information”, *International Journal of Game Theory*, vol. 13.

Myerson, R. B. (1985), “Bayesian Equilibrium and Incentive-Compatibility: An Introduction”, The Center for Mathematical Studies in Economics and Management, nº 548, Northwestern University, en A. E. Roth (ed.), “Game Theoretic Models of Bargaining”, Cambridge University Press.

Ponssard, J. P. (1975a), “Zero-Sum Games with Almost Perfect Information”, *Management Sciences*, vol. 21.

Ponssard, J. P. (1975b), “A Note on the LP Formulation of Zero-Sum Sequential Games”, *International Journal of Game Theory*, vol. 4.

Ponssard, J. P. (1976), “On the Subject of Nonoptimal Play in Zero-Sum Games with Incomplete Information”, *International Journal of Game Theory*, vol. 5.

Ponssard, J. P. y S. Sorin (1978a), “The LP Formulation of Finite Zero-Sum Games with Incomplete Information”, *International Journal of Game Theory*, vol. 7.

Ponssard, J. P. y S. Sorin (1978b), “Some Results on Zero-Sum Games with Incomplete Information: The Dependent Case”, *International Journal of Game Theory*, vol. 9.

Ponssard, J. P. y S. Zamir (1973), “Zero-Sum Sequential Games with Incomplete Information”, *International Journal of Game Theory*, vol. 2.

Raiffa, H. (1968), “Decision Analysis”, Addison-Wesley.

Sorin, S. (1979a), “A Note on the Value of Zero-Sum Sequential Games with Incomplete Information”, *International Journal of Game Theory*, vol. 8.

Sorin, S. (1979b), “An Introduction to Two-person Zero-Sum Repeated Games with Incomplete Information”, mimeo.

Stearns, R. E. (1967), “A Formal Information Concept for Games with Incomplete Information”, Report of the US Arms Control and Disarmament Agency/ST-116, capítulo IV.

Vickrey, W. (1961), “Counter speculation, Auctions, and Competitive Sealed-Tenders”, *Journal of Finance*, vol. 16.

Von Neumann, J. y O. Morgenstern (1944), "Theory of Games and Economic Behavior", Princeton University Press.

Waternaux (1982), "Solution for a Class of Repeated Games without a Recursive Structure", *International Journal of Game Theory*.

Weber, R. J. (1986), "Negotiation and Arbitration: A Game-Theoretic Perspective", The Center for Mathematical Studies in Economics and Management, Northwestern University.

Wilson, Ro (1977), "A Bidding Model of Perfect Competition", *Review of Economic Studies*, vol. 44.

Zamir, S. (1971-1972), "On the Relation between finitely and Infinitely-Repeated Games with Incomplete Information", *International Journal of Game Theory*, vol. 1.

Zamir, S. (1973a), "On Repeated Games with General Information Function", *International Journal of Game Theory*, vol. 2.

Zamir, S. (1973b), "On the Notion of Value for Games with Infinitely Many Stages", *Annals of Statistics*, vol. 2.